შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 11	03.05.2014/ მათ/III/ M303

ამოცანა № 1	გვერდი № 1

$$\frac{a_1^3}{a_1^2+a_2a_3}+\dots+\frac{a_k^3}{a_k^2+a_{k+1}a_{k+2}}+\dots+\frac{a_n^3}{a_n^2+a_1a_2}\geq\frac{a_1+\dots+a_n}{2}$$

$$\frac{a_i^3}{a_i^2+a_{i+1}a_{i+2}}-a_i=-\frac{a_ia_{i+1}a_{i+2}}{a_i^2+a_{i+1}a_{i+2}}\Rightarrow\ a_{n+1}=a_1,\ a_{n+2}=a_2$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{a_1a_2a_3}{a_1^2+a_2a_3}+\dots+\frac{a_na_1a_2}{a_n^2+a_1a_2}\right)\geq-\frac{a_1+\dots+a_n}{2}$$

გავამრავლოთ მინუსზე ანუ დასამტკიცებელი გვაქვს

$$\frac{a_1a_2a_3}{a_1^2+a_2a_3}+\dots+\frac{a_na_1a_2}{a_n^2+a_1a_2}\leq\frac{a_1+\dots+a_n}{2}$$

$$\frac{a_ia_{i+1}a_{i+2}}{a_i^2+a_{i+1}a_{i+2}}\leq\frac{a_ia_{i+1}a_{i+2}}{2a_i\sqrt{a_{i+1}a_{i+2}}}=\frac{\sqrt{a_{i+1}a_{i+2}}}{2}\leq\frac{a_{i+1}+a_{i+2}}{4}$$

$$a_i^2+a_{i+1}a_{i+2}\geq 2a_i\sqrt{a_{i+1}a_{i+2}}\Rightarrow$$

$$\frac{a_1a_2a_3}{a_1^2+a_2a_3}+\dots+\frac{a_na_1a_2}{a_n^2+a_1a_2}\leq\frac{a_2+a_3}{4}+\frac{a_3+a_4}{4}+\dots+\frac{a_n+a_1}{4}+\frac{a_1+a_2}{4}$$

$$=\frac{a_1+\dots+a_n}{2}$$

რ.დ.გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 11	03.05.2014/ მათ/III/ M303

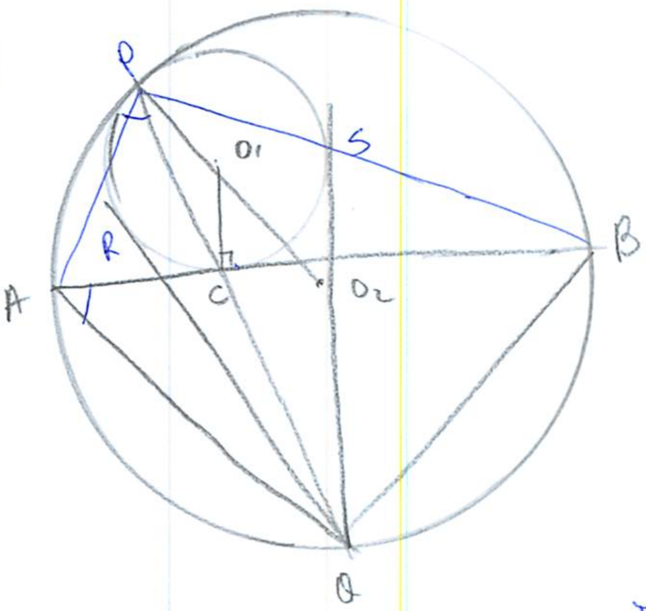
ამოცანა № 2	გვერდი № 1

დავამტკიცოთ რომ 1) Q - შუაწერტილია AB რკალის

2) ARSB წრეწირის ცენტრია Q

3) Z-ის ამ წერტილზე.

1)



~~$PO_1 = O_1C$~~

~~და~~ ცხადია P, O_1 და O_2 ერთ წრფეზეა

$PO_1 = O_1C$ და $PO_2 = O_2Q$ რადგან რადიუსებია

$\Rightarrow \angle O_1PC = \angle O_1CP$ და $\angle O_1PC = \angle O_2QC \Rightarrow$

$O_2Q \parallel CO_1 \Rightarrow O_1C \perp AB \Rightarrow$

$\Rightarrow QO_2 \perp AB$ ანუ AB-ს შუა წერტილია ანუ Q AB რკალის შუაწერტილია

2) $AQ = QB$ რადგან რკალის შუაწერტილია და ასევე

$\angle APQ = \angle QPB = \angle QAB = \angle QBA \Rightarrow \triangle QAC \sim \triangle QPA \Rightarrow$

$\Rightarrow AQ^2 = BQ^2 = QC \cdot QP = QR^2 = QS^2 \Rightarrow AQ = QB = QR = QS$

ანუ ARSB-ზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი Q.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

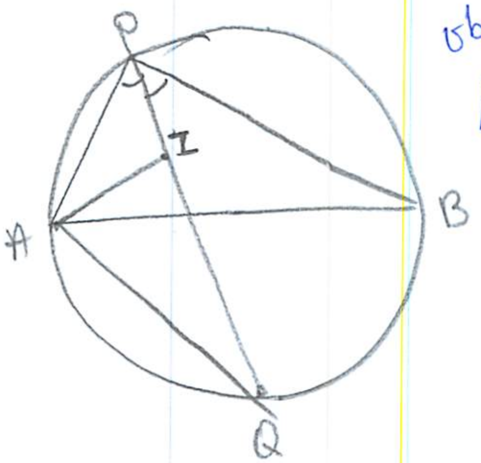
მაგიდა № 11

03.05.2014/ მათ/III/ M303

ამოცანა № 2

გვერდი № 2

3)



ცხადია $Z \in PQ$ დავამტკიცოთ რომ $AQ = QZ$

$\angle AZQ = \angle APQ + \angle ZAP =$

$= \angle QAB + \angle ZAB = \angle ZAQ \Rightarrow$

$\Rightarrow AQ = QZ$ ანუ $Z \in \omega_{ARSB}$

RS-ის ანსკვეთა P-ზე გავლებულ მხებთან იქნება AB-ზე სიმეტრიული წერტილის ... ამიტომ ~~რ.ღ. $\omega_{ARSB} \cap \omega_{PRCS}$~~ რ.ღ. $(\omega_{ARSB} ; \omega_{RPCS})$, რ.ღ. $(\omega_{ARSB} ; \omega_{QAPB})$, რ.ღ. $(\omega_{APBQ} ; \omega_{CRPS})$ ან ერთ წერტილში იკვეთება ან პარალელურია განვიხილოთ როცა P არ არის AB რკალის შუაწერტილი. მაშინ ერთ წერტილში იკვეთება

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 11

03.05.2014/ მათ/III/ M303

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

თითოეულ რიცხვს რომ k დავუმატოთ ამით ახალი შეიცვლება? არა რადგან $\frac{a+k-(b+k)}{(c+k)-(d+k)}=\frac{a-b}{c-d}$ არის

k-ები გამოვრიცხოთ. ჯერ დავუმატოთ k ყველას ისე რომ მინიმალური გახდეს 0-ის ტოლი =>

$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{2000}$ $a_1=0$ ავიღოთ

$(a_{2000} ; a_1)$ და $(a_{1999} ; a_1)$ =>

=> ~~$a_{2000} - a_1$~~ $\frac{a_{1999}-a_1}{a_{2000}-a_1} < 1 \Rightarrow 1-\frac{a_{1999}}{a_{2000}} \geq \frac{1}{10^5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{10^5-1}{10^5} \geq \frac{a_{1999}}{a_{2000}}.$

$\frac{a_{2000}-a_1}{a_{1999}-a_1} > 1 \Rightarrow \frac{a_{2000}}{a_{1999}} \geq \frac{10^5+1}{10^5}$

ასევე ნებისმიერი წყვილი i და j-სთვის თუ $i>j$ მაშინ $\frac{a_j}{a_i} \leq \frac{10^5-1}{10^5}$